# Le parole nella matematica

**Gabriele Lolli**
Scuola Normale Superiore di Pisa

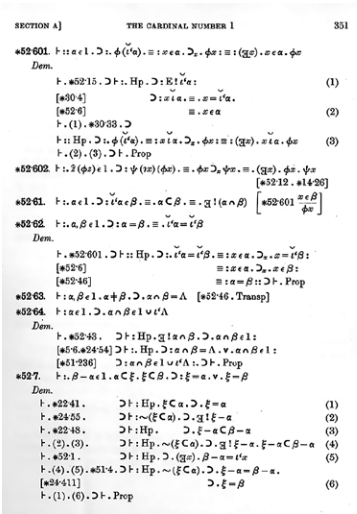
> Only think what a life it would give to the education of the country […] if a goodly inheritance could be made absolutely incompatible with incorrect spelling and a doubtful proficiency in the rule of three! Anthony Trollope, *Orley Farm.*

La matematica si apprende, si insegna e si fa nella lingua naturale. Le pagine che seguono sono dedicate a illustrare questa dichiarazione. Nell'opinione comune la matematica è formule e calcoli, e si direbbe che non ha nulla a che fare con la padronanza della lingua. Tale immagine tradizionale e diffusa è completamente distorta. Non è un caso che nei test PISA dove gli studenti italiani figurano sotto la media, rispetto ai loro coetanei degli altri paesi dell'OCSE, le discipline in cui maggiormente sono indietro siano italiano (lettura) e matematica (OCSE, n. d.). I risultati riflettono i valori degli adulti che li hanno educati.

Eppure siamo avvertiti da autorevoli matematici:

> Quando pensiamo alla matematica ci vengono in mente pagine interminabili fitte di simboli e formule. Questi due milioni di pagine [prodotte ogni anno dai matematici], però, contengono più parole che simboli: le parole spiegano l'antefatto del problema, lo svolgimento delle dimostrazioni, il significato dei calcoli e il posto del tutto all'interno del sempre crescente edificio della matematica. Come osservò il grande Carl Friedrich Gauss attorno al 1800, l'essenza della matematica sono "le nozioni, non le notazioni". Idee, non simboli (Stewart, 2014, p. x.).

La pagina di Bertrand Russel (1872-1970) in Fig. 1 sembra contraddire queste affermazioni.



SECTION A] THE CARDINAL NUMBER 1 351

*52·601. $\vdash :: \alpha \in 1 . \supset :. \phi(\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . \phi x$

*Dem.*

$\vdash . *52{\cdot}15 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : E ! \breve{\iota}`\alpha :$ (1)

[*30·4] $\supset : x \breve{\iota} \alpha . \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha .$

[*52·6] $\equiv . x \in \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . *30{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi(\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x \breve{\iota} \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \breve{\iota} \alpha . \phi x$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*52·602. $\vdash :. \hat{z}(\phi z) \in 1 . \supset : \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv . \phi x \supset_x \psi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . \psi x$ [*52·12 . *14·26]

*52·61. $\vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \breve{\iota}`\alpha \in \beta . \equiv . \alpha \subset \beta . \equiv . \exists ! (\alpha \cap \beta)$ $\left[ *52{\cdot}601 \frac{x \in \beta}{\phi x} \right]$

*52·62. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha = \beta . \equiv . \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta$

*Dem.*

$\vdash . *52{\cdot}601 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x = \breve{\iota}`\beta :$

[*52·6] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta :$

[*52·46] $\equiv : \alpha = \beta :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*52·63. $\vdash : \alpha, \beta \in 1 . \alpha \neq \beta . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ [*52·46 . Transp]

*52·64. $\vdash : \alpha \in 1 . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda$

*Dem.*

$\vdash . *52{\cdot}43 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \exists ! \alpha \cap \beta . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 :$

[*5·6.*24·54] $\supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \vee . \alpha \cap \beta \in 1 :$

[*51·236] $\supset : \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*52·7. $\vdash :. \beta - \alpha \in 1 . \alpha \subset \xi . \xi \subset \beta . \supset : \xi = \alpha . \vee . \xi = \beta$

*Dem.*

$\vdash . *22{\cdot}41 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \xi \subset \alpha . \supset . \xi = \alpha$ (1)

$\vdash . *24{\cdot}55 . \quad \supset \vdash : \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha$ (2)

$\vdash . *22{\cdot}48 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \quad \supset . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (4)

$\vdash . *52{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\exists x) . \beta - \alpha = \iota`x$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . *51{\cdot}4 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \xi - \alpha = \beta - \alpha .$

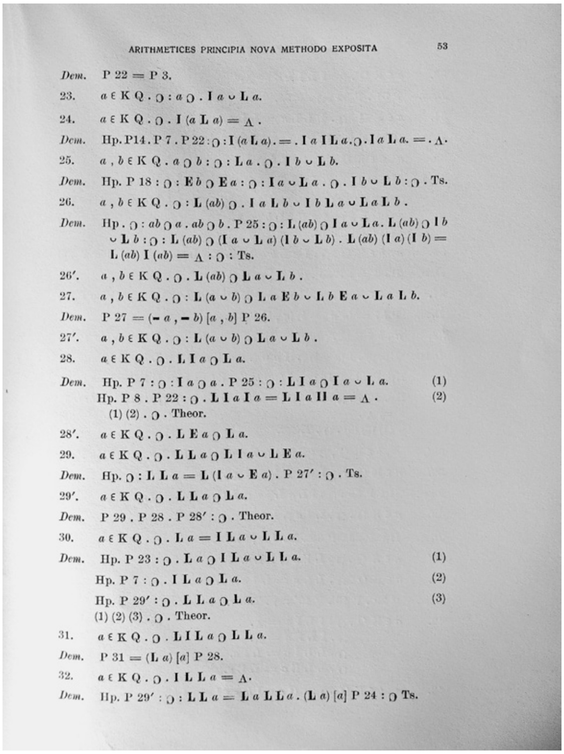
[*24·411] $\supset . \xi = \beta$ (6)

$\vdash . (1) . (6) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***Figura 1: Pagina dai** Principia Mathematica **(1910) di Whitehead e Russell***

Ma essa non è la norma, è il risultato storicamente contingente di una scoperta, quella della logica simbolica, che usata eroicamente a mano da Russell, come anche da Giuseppe Peano (1858-

1932) (Fig. 2), ha trovato la sua ragion d'essere quando ha portato a realizzare la volontà originaria di Alan Turing di parlare con le macchine[1].



ARITHMETICES PRINCIPIA NOVA METHODO EXPOSITA 53

*Dem.* P 22 = P 3.
23. a ε K Q . Ɔ : a Ɔ . I a ∪ L a.
24. a ε K Q . Ɔ . I (a L a) = Λ .
*Dem.* Hp. P14 . P 7 . P 22 : Ɔ : I (a L a) . = . I a I L a . Ɔ . I a L a. = . Λ.
25. a , b ε K Q . a Ɔ b : Ɔ : L a . Ɔ . I b ∪ L b.
*Dem.* Hp. P 18 : Ɔ : E b Ɔ E a : Ɔ : I a ∪ L a . Ɔ . I b ∪ L b : Ɔ . Ts.
26. a , b ε K Q . Ɔ : L (ab) Ɔ . I a L b ∪ I b L a ∪ L a L b .
*Dem.* Hp . Ɔ : ab Ɔ a . ab Ɔ b . P 25 : Ɔ : L (ab) Ɔ I a ∪ L a . L (ab) Ɔ I b ∪ L b : Ɔ : L (ab) Ɔ (I a ∪ L a) (I b ∪ L b) . L (ab) (I a) (I b) = L (ab) I (ab) = Λ : Ɔ : Ts.
26′. a , b ε K Q . Ɔ . L (ab) Ɔ L a ∪ L b .
27. a , b ε K Q . Ɔ : L (a ∪ b) Ɔ L a E b ∪ L b E a ∪ L a L b.
*Dem.* P 27 = (− a , − b) [a , b] P 26.
27′. a , b ε K Q . Ɔ : L (a ∪ b) Ɔ L a ∪ L b .
28. a ε K Q . Ɔ . L I a Ɔ L a.
*Dem.* Hp. P 7 : Ɔ : I a Ɔ a . P 25 : Ɔ : L I a Ɔ I a ∪ L a. (1)
Hp. P 8 . P 22 : Ɔ . L I a I a = L I a I I a = Λ . (2)
(1) (2) . Ɔ . Theor.
28′. a ε K Q . Ɔ . L E a Ɔ L a.
29. a ε K Q . Ɔ . L L a Ɔ L I a ∪ L E a.
*Dem.* Hp. Ɔ : L L a = L (I a ∪ E a) . P 27′ : Ɔ . Ts.
29′. a ε K Q . Ɔ . L L a Ɔ L a.
*Dem.* P 29 . P 28 . P 28′ : Ɔ . Theor.
30. a ε K Q . Ɔ . L a = I L a ∪ L L a.
*Dem.* Hp. P 23 : Ɔ . L a Ɔ I L a ∪ L L a. (1)
Hp. P 7 : Ɔ . I L a Ɔ L a. (2)
Hp. P 29′ : Ɔ . L L a Ɔ L a. (3)
(1) (2) (3) . Ɔ . Theor.
31. a ε K Q . Ɔ . L I L a Ɔ L L a.
*Dem.* P 31 = (L a) [a] P 28.
32. a ε K Q . Ɔ . I L L a = Λ.
*Dem.* Hp. P 29′ : Ɔ : L L a = L a L L a . (L a) [a] P 24 : Ɔ Ts.

***Figura 2: Pagina dagli*** *Arithmetices Principia* ***(1889) di Peano***

Nel *commercium* matematico, una pagina si può presentare senza parole, un misto di parole e simboli, o tutta parole. Come le pagine, altrettanto ogni esposizione, scritta o orale, originale o rivolta all'insegnamento. Le più frequenti sono le miste. Nel parlare di matematica, o nel fare matematica, che comporta il parlare, magari solo con se stessi, o nell'esporre matematica si deve sempre trovare un delicato equilibrio, variabile a seconda del livello dell'argomento e delle competenze e maturità degli attori che dialogano, tra la lingua naturale e i linguaggi simbolici.

Per chi non abbia vissuto l'esperienza della matematica non è facile capire e giustificare la necessità di tale mescolanza e di tale equilibrio. La matematica è una attività molto difficile, non da fare, ma da definire. Essa è sostanzialmente un discorso, un insieme di discorsi.

Lo dice senza esitazioni Paolo Pagli (2014), confrontando poesia e matematica:

> Occorre rendersi conto del fatto che *tutto quello che di fatto abbiamo nella matematica sono dei discorsi, delle frasi che partono da alcune immagini mentali troppo soggettive e vaghe e fluttuanti per dar luogo a un'ontologia*

1. "Il linguaggio con cui si comunica con queste macchine, ciò il linguaggio delle tavole di istruzione, forma una specie di logica simbolica. […] In effetti, si potrebbe comunicare con le macchine in un qualunque linguaggio purché sia preciso, quindi si dovrebbe poter utilizzare qualsiasi logica simbolica, purché alla macchina siano date tavole di istruzioni che la mettano in grado di interpretare quel particolare sistema logico" (Turing, 1947, p. 84). Il risultato è stato la nascita di un settore specialistico di ricerca, la cosiddetta dimostrazione automatica, che tuttavia non si limita alla dimostrazione ma tende a crescere in una vera "produzione autonoma di matematica da parte delle macchine", come profetizzava Turing.

*affidabile, oggettiva o almeno intersoggettiva*. Si può avere avuto l'impressione nella scuola e nella realtà comune, che la parte linguistica della matematica, i discorsi tramite i quali la si racconta o con cui è esposta nei libri, descrivano situazioni che esistono almeno come realtà mentali. Ma basta un attimo di riflessione per avvertire che concretamente tutto quello che abbiamo sono solo quei discorsi, appunto, e che ogni riferimento ulteriore costituisce una assunzione "naturale" (se si parla, si parla di qualcosa, e questo qualcosa avrà un tipo di esistenza, se non altro interna a noi), ma è terribilmente impegnativo. (p. 142)

Anche la pagina di Russell, alla luce del posteriore successo della comunicazione con le macchine, si deve dire che è un discorso; per capirlo bisogna impararne la lingua. Galileo (Galilei, 1623, tr. it. 1980, p. 631-2) esponeva le sue ricerche nei *Discorsi*, nel *Dialogo,* avvertendo tuttavia che la filosofia, scritta nel libro dell'universo, "non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola"[2].

I discorsi matematici si svolgono in diverse lingue, che si frantumano e si mescolano in un'esposizione poliglotta. Perché i discorsi che costituiscono la matematica nascondono la loro natura dietro a uno sbarramento di geroglifici e figure, perché non si svolgono in lingua naturale? Perché, viceversa, i linguaggi simbolici devono inevitabilmente galleggiare sulla lingua naturale? Lo scioglimento dei molteplici problemi legati a queste domande s'intreccia con la comprensione dell'esperienza iniziale dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica.

L'esposizione che segue non pretende di dare risposta a questi problemi, ma solo possibilmente di aiutare a capirli, ed è organizzata in questo modo: ricorderemo innanzi tutto come si apprendono i primi concetti matematici, la loro espressione mediante parole comuni e la loro frequente origine in analogie; vedremo come l'influsso positivo e negativo della lingua naturale si mantiene a stadi più avanzati, e le difficoltà dovute all'interferenza con i concetti formali; quindi spiegheremo, in una sorta di ricostruzione razionale[3], come dai primi simboli isolati si forma un vero e proprio linguaggio completo, costruito e diretto dalla lingua naturale che funge da metalinguaggio; infine ci chiederemo che tipi di discorsi si fanno, quale è il genere dei racconti matematici, intesi come un ramo particolare di letteratura; qualche osservazione conclusiva sarà dedicata a discutere le possibili differenze nell'uso di diverse lingue naturali per l'iniziazione matematica e per la costruzione del linguaggio matematico.

## 1. I concetti matematici

I vantaggi dei simboli, la precisione, la non ambiguità, la concisione sono noti e non è il caso di soffermarcisi[4]. La loro vera funzione è un'altra, quella di indicare idee e concetti che sono astratti, nel senso che non riguardano la realtà del mondo materiale o sociale. Anche per muoversi nella realtà occorrono idee astratte. Quando un bambino impara un nuovo concetto, per esempio quello di "amicizia", lo impara insieme all'uso di una parola comune, "amico", e non importa se all'inizio commette qualche errore di attribuzione, corretto dall'esperienza. Prima di preoccuparsi della precisione occorre afferrare il concetto.

Le idee matematiche sono formate a partire da attività e realtà mondane, e sono espresse da

2. Nel seguito discuteremo soltanto del linguaggio aritmetico; quello geometrico, e in generale quelli non verbali pongono problemi speciali, si veda (Lolli, 2014, cap. 18 "Sul ragionamento non verbale").

3. Non pretendiamo di offrire un resoconto di psicologia evolutiva, pur tenendo presente le conoscenze acquisite.

4. Anche al di fuori della matematica, si pensi alla segnaletica stradale, alle icone. Insistere su queste caratteristiche, come fa anche Stewart (la citazione precedente, p. 119, termina con: "Ciò nonostante, il linguaggio abituale per esprimere le idee matematiche è simbolico; molti articoli di ricerca contengono più simboli che parole. Le formule hanno una precisione che le parole non possono sempre raggiungere."), è riduttivo.

parole conosciute, per collegarle a situazioni note. La parola "somma" è usata in diverse occasioni mondane per indicare un totale ottenuto per aggiunzioni (come in "il sommarsi degli incidenti ha compromesso il campionato della squadra"). Il concetto matematico di somma di due numeri (interi positivi) si introduce o attraverso l'operazione primitiva del contare[5], o con considerazioni insiemistiche (l'unione di due insiemi disgiunti)[6]. Tuttavia la somma matematica non si riduce nè al contare nè a fare l'unione di insiemi. La parola "somma", o il sinonimo "addizione", assume un significato nuovo, indicando l'operazione aritmetica in questione[7].

L'operazione in sé, come concetto astratto, non è per nulla naturale; si forma tuttavia come si formano tutti i concetti; questa è una capacità cognitiva su cui non c'è consenso, e tuttavia è innegabile l'evidenza che ci si abitua a usare la stessa parola per tanti casi particolari. Anche la parola somma verrà usata inizialmente per tanti casi numerici particolari, inizialmente con qualche errore.

I nomi di tutte le prime operazioni sono parole che già hanno un significato, concreto, operativo; le prime nozioni matematiche devono per forza appoggiarsi all'esterno. Il tipo di appoggio più frequente è l'analogia, di cui parleremo dopo.

Le parole si trasformano nella definizione di un termine tecnico; esso viene espresso o dalla vecchia parola usata in un senso nuovo o da una parola inventata, quando la lingua ha la duttilità di creazione lessicale ("triangolo"), o più spesso, o assieme, per evitare confusioni e ambiguità, da un simbolo apposito. Il nome del simbolo a sua volta in generale o resta la parola usata per arrivare a determinare il concetto, una pratica che può essere fonte di ambiguità, oppure è una parola o una descrizione che dipende dalla forma del segno; questa soluzione è preferita se si vuole che l'uso sia dettato solo da condizioni sintattiche esplicite. Gli esempi sono innumerevoli, "somma" e + (letto "più"), "integrale" e $\int$ (deformazione di S, da "somma"), "implicazione" e $\rightarrow$ o $\supset$ (chiamati "implicazione" o "freccia" e risp. "ferro di cavallo"), "morfismo" e $\rightarrow$ ("freccia").

Il geroglifico, soprattutto se ha il nome del suo disegno, ha una funzione di straniamento, che non riesce tuttavia a essere totale perché il significato originario, non matematico, continua attraverso la parola a esercitare un'influenza involontaria sull'uso delle formule. Resta un alone di significato che interferisce, qualche volta in modo negativo, perché un concetto non lo si afferra mai in modo completo nelle sue relazioni con altri concetti, soprattutto ovviamente con quelli che verranno[8]. Le parole "addizionare", "aggiungere", "più" portano con sé l'idea di un aumento, sicché l'addizione di numeri negativi induce disorientamento. Lo stesso accade con le altre operazioni, sottrazione, moltiplicazione, divisione. Dividere produce una diminuzione (come nel proverbio: "la ricchezza divisa diventa povertà") incompatibile con la divisione per numeri minori di uno.

---

5. Per fare "quattro più tre" si tendono quattro dita di una mano | | | | e tre dell'altra | | | (o contando o per subitizzazione) e si contano le dita: prima a partire da 1, poi – è il primo progresso – a partire da quattro: cinque sei, sette.

6. Il concetto di insieme è già un'astrazione dalla pratica del "mettere assieme". Quella di insieme (collezione, mucchio, assembramento) è un'astrazione che appartiene alla lingua comune, e questo è il motivo per cui la fondazione insiemistica della matematica è accolta con naturalezza: è un ponte amichevole (*user friendly)* con il quotidiano.

7. Non discutiamo l'etimologia delle parole di base della matematica, alcune delle quali potrebbero essere nate già in un contesto matematico, e poi esportate, ma è molto difficile: "somma" viene dal latino *summa*, il punto più alto, poi il totale; "moltiplicazione", viene dal latino *multiplicare*, a sua volta da *multus* e vuol dire *accrescere* (come *in flumina multiplicantur* se crescono per le piogge), o in senso distributivo la produzione di una molteplicità, anche se forse poco usato dai bambini in questo senso; per chi si avvia ad apprendere la matematica "sottrarre", "dividere", "aggiungere" hanno solo il significato prematematico che hanno nelle operazioni concrete. Su attività didattiche relative alla ricerca dell'etimo si veda (Navarra, 1990).

8. Viene spontaneo usare la terminologia fenomenologica della "presa di un concetto (essenza)", o della "prospettiva eidetica", che è sempre parziale; nomi e simboli devono essere sottoposti a continua revisione e aggiornamento del loro significato, che ne aumenta la presa.

Il permanere del significato concreto si spiega con il fatto che le parole per le operazioni spesso sono introdotte come metafore, le quali hanno forza di suggestione. Purtroppo le metafore si rifanno in genere a uno solo dei significati possibili, quello che si adatta meglio ai numeri interi positivi, non ad altri, che pure si sa che si dovranno in seguito considerare. “La somma è l’unione di due contenitori” non è vero per i numeri negativi. “Moltiplicazione è addizione iterata” non è vero se il moltiplicatore è un numero razionale.

È curioso che non si dica di solito che la divisione è una sottrazione iterata, che sarebbe utile in molti casi, e anche naturale: per distribuire 15 caramelle tra 5 bambini, si fa il giro dandone una a ciascuno per incominciare; si è sottratto 5; si continua con la distribuzione di altri 5, sottratto ancora 5; ne restano 5 per l’ultima distribuzione[9]. Così la divisione di $a$ per $b$ ci dice quante volte il $b$ sta in $a$, cioè è connessa alla misura, e si adatta anche al caso che $b$ sia minore di 1, dando in modo naturale un risultato maggiore di $a$[10].

La moltiplicazione tuttavia non cambia significato al modo dei concetti della vita quotidiana, che mutano col tempo: gli “amici” che erano solo i compagni di giochi, possono in seguito essere anche Stati alleati del proprio paese. Quando un concetto matematico si estende a nuovi domini, i matematici si ispirano a un principio di permanenza: si vogliono conservare le leggi fondamentali che lo definiscono; si rimodella la conoscenza e si riorganizza il sapere, ma non si possono riformulare o correggere tutti i risultati precedenti; se l’estensione non può essere conservativa, si cambia nome e concetto. Le leggi fondamentali (individuate dall’esperienza storica) devono essere compatibili con tutte le metafore possibili, e ne deriva l’esigenza di definizioni sempre precise, che non lascino filtrare condizioni tipiche di una particolare metafora, ed anche l’opportunità, oltre al valore simbolico, di usare per definire i concetti un simbolo apposito, insieme alla parola comune mutevole.

Le metafore non sono definizioni, servono a giustificarle e a farle accettare; tuttavia proprio perché le metafore spiegano, gli studenti tendono ad affidarsi al significato familiare che comprendono, e a non prestare attenzione alle definizioni rigorose, restrittive e indirizzate piuttosto a essere compatibili con le estensioni e ad armonizzarsi con altre definizioni. Nello stesso tempo, paradossalmente, vedremo che gli stessi studenti tendono a focalizzarsi sui termini matematici come se fossero abbacinati da questi, e trascurano il discorso entro cui sono immersi, che può essere la descrizione del problema che devono risolvere o una dimostrazione.

## 2. Analogie

Le nuove idee si formano preferibilmente per analogia; analogie prima tratte dall’esperienza pratica e in seguito anche da altre parti della matematica[11].

L’analogia è definita come un trasferimento di informazione strutturale da un sistema, base o fonte (ingl. *source)* a un altro sistema bersaglio (ingl. *target;* English, 1997*)*. Ma per evitare che le parole usate evochino aspetti inutili o sbagliati l’analogia deve riferirsi alle relazioni strutturali, non a elementi superficiali.

---

9. Qualche tempo fa si usava questo modo di introdurre la divisione, si veda per esempio (Silvestri, 1894, p. 29) “Se dobbiamo eseguire le seguenti sottrazioni 10 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2, cioè dal 10 dobbiamo togliere il 2, fin che si può, possiamo dire che *dividiamo* il 10 per 2”.

10. Non è un caso che Euclide, e altri prima di lui, definissero “$a$ multiplo di $b$”, anche per numeri interi, se $a$ è misurato da $b$ (*Elementi* VII, Def. 5).

11. Hofstadter e Sander, (2013), sostengono che ogni concetto si forma attraverso il meccanismo dell’analogia.


***Figura 3: Lo schema dell'analogia***

Non c'è tuttavia una definizione precisa, né quindi una regola semplice per fare analogie, anche perché le relazioni individuate nella situazione di base sono riconosciute rilevanti non sempre in anticipo ma proprio in funzione del trasporto. A quelle relazioni spesso non si presta attenzione se non quando sono posti i problemi. Nei comportamenti usuali non c'è abbastanza attenzione per fare struttura[12].

Ci sono le analogie buone, creative, e quelle povere. Un'insegnante di asilo è riuscita a fare capire il concetto di pari e dispari, e a far scoprire teoremi sulla parità o meno della somma di numeri pari o dispari (cf. Davis & Maker, 1997), basandosi sul modo in cui i bambini usavano uscire dalla classe in fila per due. Qualche volta tutti erano accoppiati, qualche volta uno restava scompagnato, a seconda delle assenze. Bisogna farsi una rappresentazione mentale: un numero pari è rappresentato da una classe che esce dall'aula con i bambini tutti accoppiati, ed è espresso da questa immagine:

un numero dispari una classe con un bambino non accoppiato:

Due classi del tipo dispari

12. Lakoff e Núñez (2000, p. 5) parlano invece di metafora concettuale "Nella maggior parte dei casi gli esseri umani concettualizzano i concetti astratti in termini concreti, usando idee e modi di ragionare radicati nel sistema sensomotorio. Il meccanismo attraverso il quale l'astratto è compreso in termini di concreto si chiama *metafora concettuale*". Non è chiara la distinzione tra metafora e analogia in questo contesto cognitivo. Anna Sfard (2008), non li distingue chiaramente, dice solo che la connessione tra i due domini origine e bersaglio nella metafora è solo implicita. La metafora concettuale per Lakoff e Núñez è "un meccanismo cognitivo che ci permette di ragionare su una cosa di una specie come se fosse di un'altra", p. 6. Si postula cioè che la metafora trasporti al bersaglio la struttura inferenziale della fonte, nel senso che valgono le stesse leggi per ragionare nei due campi. Quindi si presuppone che la fonte sia strutturata indipendentemente dal trasporto, contrariamente a quanto abbiamo osservato sopra. Quando sono disponibili diverse metafore (per esempio per la moltiplicazione il pooling di insiemi e l'iterazione dell'unione insiemistica, ma potremmo aggiungere la metafora della misura dei segmenti) queste sono dichiarate equivalenti, nel senso che le diverse fonti dovrebbero avere la stessa struttura inferenziale, il che è dubbio a meno che non ci si limiti a quelle leggi che saranno trasferite proprio alla moltiplicazione. A noi sembra che nella metafora concettuale, a differenza dell'analogia, non sia individuata all'inizio la struttura della fonte, e quindi il trasporto sia indeterminato o arbitrario. Si veda la recensione in (Lolli, 2003).

possono essere riunite (sommate) e ordinate come un pari accoppiando i due scompagnati:

In questo caso la rappresentazione dei numeri che si rivela utile, riscoperta a partire dalla classe ordinata, è quella antica geometrica dei sassolini, che è anche la più naturale nel primo accostamento al numero. Ma non si tratta di un mucchio di sassolini, quanto di una distribuzione ordinata, che può essere diversa da problema a problema.

L'analogia si accompagna a uno speciale ordinamento della scolaresca, funzionale al concetto che l'insegnante vuole presentare. Essa è attivata da una particolare rappresentazione. Una rappresentazione di una situazione problematica è un passo di matematizzazione, perché si devono mettere in evidenza i concetti pertinenti, o enfatizzando le parole o adottandone di nuove, e se ne devono tralasciare altri, quindi schematizzare, guardando a situazioni familiari con un occhio guidato dall'obiettivo matematico.

Capita che la nuova idea matematica sia la rappresentazione stessa, che nasce come uno schema formale nella soluzione di problemi.

Un bambino di Grade 4, Brandon, aveva risolto il problema di quante torri diverse si possono costruire se ogni torre è fatta con quattro cubi sovrapposti e si hanno a disposizione cubi bianchi e cubi rossi, quanti se ne vogliono (Davis & Maher, 1997, p. 106-7).

Quindi gli era stato proposto il problema delle pizze: quanti tipi di pizze diverse si possono fare se ogni pizza ha la mozzarella e in aggiunta può avere uno o più dei seguenti ingredienti: salsiccia, funghi, peperoni verdi, peperoni.

Per trattare questo problema Brandon inventa una notazione che è una matrice di 0 e 1 con i vari ingredienti in entrata e 0 significa che il particolare ingrediente non c'è e 1 che c'è. Non si vuol dire che sia un genio, ma solo attento e capace di pensiero analogico. Ipotizziamo che Brandon fosse familiare per qualche via con l'uso dello 0 e 1 per il sì o no, che si trova su diversi elettrodomestici. La forma della matrice potrebbe essergli venuta dal gioco della battaglia navale.

Utilizzando la sua matrice, Brandon si è accorto che il problema era lo stesso di quello delle torri, mettendole in orizzontale con i quattro cubi in entrata e scrivendo 0 per cubo rosso e 1 per cubo bianco. Diremmo che ha scoperto che i due problemi erano isomorfi, grazie alla loro rappresentazione e soluzione matematica.

## 3. Problemi verbali

La soluzione di problemi relativi a situazioni reali ed espressi a parole (*word problems* nella terminologia anglosassone) è un punto fermo della metodologia didattica corrente. Anche in Italia le migliori iniziative sono rivolte a indirizzare i docenti su questa strada, sottolineando l'importanza della discussione del problema e delle soluzioni. Nel progetto mat@bel sono previsti per crescere in parallelo nella padronanza della lingua e della matematica[13].

Un esempio riportato da studiosi di didattica riguarda l'apprendimento dei numeri negativi (Davis & Maher, 1997); si svolge un gioco basato su un'urna contenente palline in cui gli allievi ne aggiungono e ne tolgono, su indicazione dell'insegnante, e l'attività o gioco è accompagnata

13. Si vedano le proposte di attività nel sito dell'Indire
http://forum.indire.it/repository_cms/working/export/6322/,
http://forum.indire.it/repository_cms/working/export/6334/,
http://forum.indire.it/repository_cms/working/export/6336.

da domande, come quella cruciale "Ci sono ora nell'urna più palline di quante ce ne erano al momento in cui abbiamo incominciato a giocare? Quante?". Frasi del genere non sono di facile comprensione, e dimostrano l'importanza della padronanza della lingua, oltre alla familiarità con situazioni concrete.

Tuttavia la presentazione di problemi matematici nella lingua naturale è fonte di confusioni e reali difficoltà, che vengono semplicisticamente e talvolta erroneamente attribuite alla matematica. I problemi verbali sono ambigui; quelli buoni sono quelli che spingono alla formulazione di un problema matematico, sia pure ancora nella lingua naturale; se invece suggeriscono una tecnica da usare senza pensare sono inutili o fuorvianti. Lasciati a se stessi, i bambini non prestano attenzione alla formulazione rigorosa dei problemi, sia espressi in lingua, sia di genere più avanzato, puramente matematico, perché comunque è fatica; è documentato che gli studenti non analizzano bene il testo per farsi un modello astratto della situazione problematica, cercano subito di applicare la tecnica matematica più semplice, per esempio si fanno condizionare da certe parole a pensare che il problema sia di tipo additivo quando invece è moltiplicativo. La classificazione stessa dei problemi in additivi o moltiplicativi è un esempio della cattiva metodologia ora deprecata, quella di distinguere i problemi a seconda della operazione da usare.

I problemi moltiplicativi a loro volta si classificano in tre categorie: problemi di *ripartizione*, dove si deve dividere una quantità di oggetti in insiemi uguali, problemi di *confronto*, dove si chiede per esempio quante macchine ha A se A ha il triplo di macchine di B (o tre volte tante macchine quante B), e B ne ha quattro (oppure A ne ha sei), problemi *cartesiani*, dove si deve decidere quante combinazioni si possono fare prendendo il primo elemento in un insieme e il secondo in un altro.

Le osservazioni dei didatti sulla base di numerose prove portano a concludere che il primo tipo di problema è il più facile, salvo il caso in cui ci sia il resto, di cui di solito ci si dimentica. Se si chiede quanti autobus da 36 posti sono necessari per portare la popolazione della scuola di 1120 persone a una gita, le risposte in maggioranza restituiranno il valore 31, dimenticando le 4 persone del resto. Scatta negli allievi il riconoscimento della divisione, e se il docente vuole che si faccia la divisione bisogna trovare il quoziente. Il significato reale del problema è oscurato dalla fiducia nella virtù taumaturgica di una matematica non ancora ben assimilata.

I secondi appaiono più difficili agli studenti, perché pare che essi restino confusi (la lingua è l'inglese) dalla formulazione *three times as many as*, che contiene la parola *times* sia quando il problema richiede una moltiplicazione sia quando richiede una divisione. La difficoltà si ripete a uno stadio successivo nel quale agli studenti è richiesto di formalizzare un problema: la condizione che in una scuola ci sono sei volte tanti studenti ($S$) quanti professori ($P$) (*six times as many students as professors)* viene frequentemente espressa dalla relazione simbolica $6S = P$, questa volta non tanto per la parola *times* che correttamente suggerisce la moltiplicazione[14], quanto per un effetto di trascinamento dovuto alla struttura lineare dell'espressione, che si pensa di dover replicare (Clement, Lochead & Monk, 1981).

Nei problemi cartesiani si manifesta pure qualche difficoltà perché non si vede immediatamente la situazione moltiplicativa, in riferimento alle analogie usate per l'introduzione dell'operazione, e vengono interpretati in termini additivi. Devono formarsi un modello puntuale dettagliato per capire la soluzione.

Dunque pare confermato il paradosso che nei problemi verbali gli studenti cerchino indizi matematici nel testo, ma isolati, e si lascino influenzare da (quelle che pensano siano) parole chiave che suggeriscano la tecnica da applicare. Quasi che appena introdotti i primi mattoni di quello che deve diventare il linguaggio matematico essi pensino che sono un corpo estraneo e autonomo, e

14. In italiano, "sei volte più studenti che professori" potrebbe anche indirizzare verso l'ipotesi di un problema additivo.

quando devono fare matematica si fanno sordi ai richiami delle altre parole, o non le interpretano come il contesto che dà senso alle formule incastonate.

## 4. Linguaggio e metalinguaggio

Con le parole prese dalla lingua naturale si formano in matematica frasi che non hanno un corrispettivo letterale nella stessa, perché le parole promosse a termini tecnici cambiano talvolta la loro collocazione categoriale, in genere da verbi diventano nomi. O da parole che indicano azioni si mutano in parole che descrivono il risultato dell'esecuzione di una oper*azione*. Le parole della matematica sono il nome di entità astratte che di solito – le prime, aritmetiche – sono funzioni (seguiranno gli insiemi)[15]; invece di funzioni si chiamano operazioni, forse per evocare l'operare. L'espressione "la somma di 2 e 3" è una descrizione, non ha verbo; in essa si danno due divergenze dal significato intuitivo: da una parte invece dell'operare con le dita e il contare si allude alla esecuzione mentale dell'operazione "somma" sui dati addendi; dall'altro l'operare passa in secondo piano (anche perché non c'è più, a meno che non si chieda di calcolare la somma di 2 e 3) rispetto al risultato di tale operare. Il termine "somma di 2 e 3" non può che essere grammaticalmente il soggetto o il complemento di una frase; le prime frasi disponibili sono del tipo "la somma di 2 e 3 è uguale a 5", o "la somma di 2 e 3 è minore di 7", o "4 è minore della somma di 2 e 3", o anche in simboli "$2 + 3 = 5$", "$2 + 3 < 7$", "$4 < 2 + 3$". In quanto soggetto di una frase, suggerisce di essere il nome di un oggetto, un numero. La lettura di = come "è uguale a" fa sì che la frase "$2 + 3 = 5$" assuma una forma statica dichiarativa[16].

Sulla somma in sé si fanno tuttavia considerazioni varie, non ci si limita a calcolarla per vari argomenti, ciò a pronunciare "la somma di… e … è…". Presto si incontra per esempio la proprietà commutativa, che è utile da conoscere e sfruttare: "l'addizione è commutativa" è una frase completa in cui "l'addizione" è il soggetto, e che trascende i casi particolari di somma di due numeri. Si è a un altro livello da quello dei calcoli, dove i soggetti sono di solito i numeri, e le frasi relative come abbiamo visto facilmente abbreviate in modo completamente simbolico. I due livelli sono ormai stabilmente chiamati, non solo per la matematica ma per ogni disciplina, il *livello oggetto* e il *metalivello*. Le considerazioni che si svolgono nel metalivello sono espresse nel *metalinguaggio*, qualunque formato prendano[17].

Il metalinguaggio può coincidere con il linguaggio-oggetto, un caso si verifica quando si espone in italiano (metalinguaggio) la grammatica dell'italiano, e si fa allora largo uso delle virgolette per indicare elementi del linguaggio-oggetto. Può coincidere con il linguaggio-oggetto matematico in sofisticate analisi logiche, dove i linguaggi sono formalizzati. Nella matematica elementare il metalinguaggio è normalmente la lingua naturale.

Il linguaggio-oggetto è quello problematico, da costruire o studiare, ma nel caso della mate-

---

15. Si direbbe che la prima parola è "numero", ma è dubbio che ci si formi un concetto di numero, si veda la prossima nota.

16. Quando si conta, i numeri sono solo parole da recitarsi in ordine, a scandire il tempo colorando gli istanti in modo diverso. Il passaggio dalla attività mentale al risultato è il processo di reificazione, trascinato dal linguaggio, che secondo psicologi e filosofi della matematica porta a concepire gli enti matematici come oggetti; si veda per esempio (Sfard, 2008), o più in generale, non solo per i numeri di conto (Giusti, 1999). Si noti tuttavia che esistono anche altre letture di =, una in questo caso più fedele alla spiegazione intuitiva e più coerente con la natura di descrizioni, non di nomi propri, dei termini uniti dal segno: = significa che i due termini si convertono, con le operazioni ammissibili, allo stesso risultato numerico. Allora una affermazione di uguaglianza è in realtà una dimostrazione, non una frase singola ma un discorso.

17. In logica si usa il termine "linguaggio" in un senso diverso da quello che indica la capacità generica di comunicare attraverso sistemi simbolici, e che di solito si contrappone a "lingua". Un linguaggio è uno di questi sistemi. Probabilmente l'uso è una conseguenza del prevalere dell'inglese, e della forma *language*, rispetto al francese di Saussure.

matica è ulteriormente problematico perché è sorprendente proprio il fatto che la matematica sia chiamata un linguaggio: all'inizio non sembra tale, quando si ha esperienza solo delle formule atomiche numeriche, sembra un insieme di frammenti di frasi primitive strozzate, come suoni di parole umane emessi da un animale, al massimo comandi di calcoli; poco alla volta tuttavia si arricchisce di tutte le categorie grammaticali di una lingua: nomi, verbi, pronomi, aggettivi. I verbi corrispondono alle relazioni, gli aggettivi alle proprietà o insiemi, i pronomi alle variabili con i quantificatori. Allora parlare di linguaggi e discorsi a proposito della matematica non è più solo un metafora. Discuteremo in seguito qualche aspetto della costruzione del linguaggio-oggetto.

Perché si forma un linguaggio? Il motivo è che le conoscenze matematiche sono tutte collegate tra loro in varie forme. L'immagine della rete è quella più fedele, ma molte parti sono organizzate ad albero, a cascata. Il legame più frequente si esprime con la relazione "se… allora…". Non è un caso che Russell (1903, p. 37) abbia creduto di definire la matematica pura come "la classe di tutte le proposizioni della forma '$p$ implica $q$', dove $p$ e $q$ sono proposizioni contenenti una o più variabili […]"[18], a prescindere dalla bontà o accettabilità della sua definizione.

Il metalinguaggio plasma e dirige il linguaggio-oggetto, ma mentre lo plasma filtra anche in esso e trasferendogli, mascherate, alcune sue capacità espressive lo trasforma appunto in un linguaggio. Le definizioni matematiche e le proprietà oggetto di studio sono concepite ed espresse nel metalinguaggio; soprattutto sono espresse nel metalinguaggio le strategie di risoluzione di problemi e la riflessione che porta a formularle. Tutte vengono tuttavia almeno parzialmente tradotte o riformulate nel linguaggio-oggetto per dare operatività al loro uso, e vengono a costituire una rete di formule e operazioni simboliche non solo numeriche che si connettono tra loro. Consideriamo qualche esempio.

La definizione di somma, comunque sia stata motivata, diventa (a un certo livello di sviluppo) una coppia di equazioni:

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + (y + 1) = (x + y) + 1, \end{cases}$$

il riferimento alle quali sostituisce ogni immagine o metafora con cui fino ad allora si è concepita l'operazione.

La commutatività, che a parole si esprime dicendo che il risultato non cambia se gli addendi si scambiano tra loro, viene in generale proposta come $x + y = y + x$, o qualcosa del genere quando il simbolismo sia arricchito dagli elementi necessari, in questo caso e in primo luogo le variabili; le variabili, di cui parleremo in seguito, sono essenziali non solo per fare matematica, ma anche per la traduzione matematica del metalinguaggio. Vedremo tuttavia che ci sono complicazioni con l'espressione della commutatività.

Una definizione come quella dei numeri primi nasce e si dà interamente in italiano: "un numero maggiore di 1 è primo se e solo se è divisibile solo per 1 e per se stesso", ed è la più chiara e in questo caso concisa[19], forse non direttamente operativa per guidare lo studente a verificare se un numero è primo; deve dipanare la frase per individuare appigli che suggeriscano le operazioni da fare. Quella che viene presentata agli studenti già esposti alle variabili suona infatti press'a poco così: "ogni $y$ che divide $x$ è uguale o a 1 o a $x$", o "$y$ divide $x$ solo se $y$ è uguale o a 1 o a $x$". Lo studente può utilizzare questa definizione se sa distinguere tra $x$ che è il numero dato e $y$ che indica

18. Nella parte omessa Russell tenta di caratterizzare ulteriormente le proposizioni precisando che devono contenere solo nomi di entità logiche.

19. Ancora più concisa e con meno espliciti riferimenti numerici è "un numero maggiore di 1 è primo se e solo se non ha divisori non banali", ma questa appartiene a un gergo metalinguistico che deve essere spiegato: 1 e $n$ sono divisori banali, o ovvi, di $n$, se si ha familiarità con il concetto di divisore.

i numeri da prendere in considerazione per la verifica, e soprattutto se sa cosa vuol dire “solo se”. Il metalinguaggio incomincia a diventare difficile quando deve esprimere relazioni interne alla matematica.

I brandelli simbolici che costituiscono la definizione, collegati da parole della lingua, se queste hanno un corrispettivo formale, perché sono definizioni precedenti o per convenzione esplicita, si compongono in una frase completa del linguaggio-oggetto[20], in questo caso

$$\forall y(\exists z(y \cdot z = x) \to y = 1 \vee y = x),$$

oppure se si è introdotta per definizione il nuovo simbolo $y \mid x$ per $\exists z(y \cdot z = x)$, come è lecito per le regole del linguaggio-oggetto formale fissate dal metalinguaggio (in modo più “breve” si dice che si introduce una abbreviazione con una definizione nominale)

$$\forall y(y \mid x \to y = 1 \vee y = x).$$

Se si introduce un ulteriore simbolo nuovo *Pr,* si ottiene come definizione una formula tutta simbolica

$$Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall y(y \mid x \to y = 1 \vee y = x)$$

che si aggiunge al catalogo delle conoscenze matematiche.

Una strategia come quella per trovare il MCD di due numeri $n$ ed $m$ può essere impostata osservando che se si divide il più grande, supponiamo $n$, per il più piccolo $m$, si ha un quoziente e un resto $n = m \cdot q + r$, con $r < n$, e ragionando che se un numero divide $m$ e $r$ allora divide anche $n$ si può vedere l’utilità di ripartire a calcolare il MCD di $m$ e $r$, una coppia “più piccola” (in cui il massimo è più piccolo di prima), finché non si arriva o a una coppia per cui la divisione è esatta, oppure a 1 (poi ci sono dettagli da precisare). Per non fare troppe divisioni, non economiche, in base alla definizione di divisione come differenza iterata si può semplicemente sostituire la prima coppia $(n, m)$ con la coppia $(n - m, m)$ o $(m, n - m)$, e così via. La strategia individuata diventa un algoritmo ricorsivo (come la “somma” era diventata una coppia di equazioni ricorsive), si può scrivere in un qualsiasi linguaggio di programmazione, ma non lo si può inventare scrivendo direttamente formalmente le istruzioni in successione: nello scrivere di fare un’operazione si deve avere già in mente quello che si farà dopo. Per questo, per avere una visione complessiva, si disegna prima una *flow-chart*.

Le *flow-chart* costituiscono un altro linguaggio: si può dire quando le si usano per descrivere un algoritmo che appartengono al metalinguaggio, arricchito di diagrammi oltre alle parole, oppure le si può vedere, con le loro regole di costruzione, come un altro linguaggio-oggetto matematico, correlato a quello aritmetico da regole di traduzione. Dovrebbe essere chiaro che il metalinguaggio gestisce un insieme di linguaggi-oggetto.

La lingua naturale ha dunque la funzione prima di creare i concetti matematici, poi di continuare a ragionare su di essi per arricchirne la comprensione e le proprietà godute. Una condizione necessaria e fondante che accompagna questo sviluppo è quella di insegnare e guidare nell’uso del simbolismo, di esserne la grammatica.

Anche una semplice equazione come $x + y = y + x$ deve essere spiegata, insieme alle regole per utilizzarla all’interno di discorsi più ampi, ovvero di ragionamenti. La spiegazione dell’equazione (di

---

20. Supponiamo noti i simboli per gli operatori logici: $\wedge$ congiunzione, $\vee$ disgiunzione, i quantificatori. Per i quantificatori si veda il paragrafo 5 più avanti.

come si legge o interpreta, non della sua verità) consiste presumibilmente nel dire che se si esegue prima il calcolo indicato a sinistra e poi quello indicato a destra si arriva allo stesso risultato. Le spiegazioni sono quasi sempre di questo tipo, per richiamare le esperienze originarie alludono a comportamenti e azioni (sia pure mentali), non ai soggetti delle frasi. Tuttavia si noti che con l'apparire delle variabili, anche in frasi elementari come le equazioni, il riferimento ad azioni compiute su un qualunque valore della variabile diventa problematico, in quanto si starebbe parlando di una infinità di casi. La verifica che un numero dato $x$ è primo comporta di verificare che se $y$ divide $x$ allora $y = 1$ o $y = x$; $y$ indica un numero qualunque, e non si può ricondursi ai calcoli per tutti i possibili valori di $y$. La restrizione a un numero finito di prove si ottiene se si conosce il fatto espresso da

$$y \mid x \rightarrow y \leq x.$$

Una volta riconosciuto questo fatto, l'informazione si ingloba in una definizione più esplicita, anche se sovrabbondante, di "primo":

$$Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall y \leq x(y \mid x \rightarrow y = 1 \vee y = x)^{21}.$$

La vera spiegazione dell'equazione, dal punto di vista linguistico, consiste nell'insegnarne l'uso nel collegamento con altre formule; la possibilità di sostituire legittimamente un termine dell'equazione al posto dell'altro in ogni contesto formale non allude a una vera azione di sostituzione, ma afferma l'equivalenza tra due affermazioni, una con $s$ e una con $t$:

$$s = t \rightarrow (A[x/s] \leftrightarrow A[x/t]).$$

La prescrizione di nuovo si traduce in una formula completa dichiarativa del linguaggio-oggetto.

Quando si diceva che "tutto quello che di fatto abbiamo nella matematica sono dei discorsi" si alludeva a questo modo di entrare nella matematica, almeno in quella elementare, con la trasformazione di descrizioni di azioni in frasi statiche di cui i numeri o altri enti matematici sono soggetti. Un'altra spiegazione sarà vista più avanti.

Non è sempre facile distinguere in modo netto frasi che appartengono al metalinguaggio e frasi del linguaggio-oggetto, sia perché sono mescolate, sia perché spesso si può dire la stessa cosa a entrambi i livelli, se la costruzione metalinguistica del linguaggio-oggetto ha avuto successo e ha prodotto una vera lingua. Perché abbia successo totale, come abbiamo visto in alcuni esempi, nel linguaggio-oggetto, simbolico, devono essere inserite diverse soluzioni che riguardano la logica.

Anche i simboli logici che abbiamo usato, come i connettivi, sono introdotti dal metalinguaggio assieme a una spiegazione del loro uso per la trasformazione delle frasi; la spiegazione si riduce di solito a coppie di regole (di introduzione e di eliminazione) schematicamente rappresentate come tutte le regole logiche, per esempio da

$$\frac{A \wedge B}{\text{A.}}$$

Un altro requisito per l'espressività del linguaggio-oggetto è la possibilità di distinguere diversi livelli di astrazione. Le operazioni, che non sono più quello che si fa ogni volta che si fa un calcolo, ma

21. La definizione $y \mid x \leftrightarrow \exists z(y \cdot z = x)$ mostra che un divisore $y$ di $x$ è sempre accompagnato da un altro divisore $z$, per cui per la verifica di $Pr(x)$ si dovranno considerare solo i casi $y < \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ ("parte intera della radice").

sono diventate concetti mentali, devono avere un loro simbolismo: la somma come funzione non può essere indicata da +, per ragioni grammaticali: + è un operatore descrittivo incompleto, non un termine che possa stare come soggetto. Una soluzione è quella di introdurre una notazione speciale per le funzioni; quella correntemente invalsa in logica comporta l'espressione $\lambda u, v.(u + v)$ come nome dell'operazione "somma". La frase del metalinguaggio "la somma è commutativa" diventa

$$\forall x \forall y(\lambda u, v.(u + v)(x, y) = \lambda u, v.(u + v)(y, x))$$

nel linguaggio-oggetto, dove i due termini dell'equazione si convertono rispettivamente a $x + y$ e a $y + x$ con le regole logiche specificate per questa notazione per le funzioni. La versione $x + y = y + x$ proposta agli allievi è una conseguenza della commutatività, e la semplificazione è necessaria perché il concetto astratto di funzione non può che essere introdotto agli studenti solo a uno stadio più maturo[22].

Si capisce facilmente che la formalizzazione completa, o spinta, cioè la scrittura del metalinguaggio nello stesso linguaggio-oggetto sia impegno che spaventa e da cui si rifugge. Non è neanche necessaria, se la lingua finalizzata a governare il linguaggio matematico si abitua a essere rigorosa, in modo da evitare per esempio le ambiguità rilevate a proposito dei problemi verbali. Infatti il motivo per cui il metalinguaggio filtra dentro il linguaggio-oggetto non è una perversa volontà formalizzatrice, ma il risultato naturale di una regimentazione della lingua nella sua funzione di metalinguaggio matematico. La sua funzione è quella di definire concetti, funzioni e dimostrazioni in modo che possano essere usati attraverso le combinazioni dei simboli associati. Il vincolo imposto dalla finalizzazione sintattica costringe alla massima precisione. Il metalinguaggio può dunque restare quello naturale, seppure solo una parte della lingua, perché molte parole anche con riferimenti quantitativi non hanno posto nel metalinguaggio matematico[23], ma educato, e con lo stesso rigore del discorso matematico. Vedremo un esempio in cui ciò non avviene.

Il linguaggio-oggetto non solo si arricchisce di concetti man mano che aumentano le conoscenze matematiche, ma si espande inglobando la logica deduttiva delle inferenze nelle dimostrazioni. Queste corrispondono all'attività comune dell'argomentare o del raccontare. Il legame deduttivo tra premesse e conclusione, scandito dai passi intermedi, dai sottomoduli, è come la descrizione di un viaggio, con i suoi incontri imprevisti, le deviazioni obbligate, le visite di località poco conosciute, le foto ricordo dei monumenti notevoli. Se il racconto è tutto in linguaggio-oggetto, esso giustifica, proprio quando più appare lontano da una narrazione, il parallelo con la letteratura, se si vuole con il genere "resoconti di viaggi", oppure se prevale il senso di irrealtà con le fiabe (dove peraltro il viaggio è tema dominante). La metafora del racconto di viaggio è indipendente dall'uso del simbolismo[24], non dal fatto che la matematica è strutturata come un linguaggio. Il linguaggio-oggetto diventa tutto simbolico solo qualche volta, localmente, nella trattazione di determinati problemi, per legare le frasi pertinenti (un racconto breve); più frequentemente resta un misto, e in chi è molto maturo prevale anche la lingua naturale.

22. Non si vuole invitare ad imparare questo simbolismo, nè tanto meno proporre di usarlo in classe. Tuttavia se non si vuole inculcare un'idea sbagliata della matematica, che presto o tardi diventa una palla al piede, occorre far capire non solo la differenza tra il linguaggio matematico e il metalinguaggio, e la loro differente funzione, ma anche all'interno del linguaggio matematico la differenza di livelli di astrazione. Si pensi al caso dell'analisi matematica: numeri razionali, numeri reali che sono insiemi di razionali, funzioni di variabile reale, funzionali da funzioni a numeri come l'integrale, ecc.

23. Si veda l'esempio di "quasi" più avanti.

24. "[…] una dimostrazione, in pratica, è un racconto matematico con un suo flusso narrativo" (Stewart, 2014, p. 12).

## 5. Logica

Per costruire il linguaggio-oggetto, il metalinguaggio deve inserirvi una parte della logica, come si è detto, e in questo campo la padronanza della lingua è essenziale; non è tutto rose e fiori come per la congiunzione. Consideriamo il caso della particella "solo se" che è frequentemente usata nel gergo matematico, soprattutto nelle locuzioni "se e solo se" che intervengono nelle definizioni, o nelle equivalenze.

La congiunzione di "$A$ implica $B$" ($A \to B$) e dell'inversa "$B$ implica $A$" ($B \to A$) traduce "$A$ se e solo se $B$", o "$A$ è condizione necessaria e sufficiente per $B$", in preparazione a una dimostrazione duplice, nelle due direzioni. Ma quale è la direzione del "se" e quale quella del "solo se"? Dato lo scarso e non uniforme uso di queste locuzioni nei discorsi usuali, il riconoscimento non è spontaneo. Siccome $A \to B$ si legge anche "se $A$ allora $B$" si tende a identificare questa implicazione con il "se", mentre invece corrisponde a "$A$ solo se $B$".

La gestione del "solo se" disorienta perché non si vede che ha lo stesso senso che nella lingua naturale, e non lo si vede in genere perché si ha una nozione distorta del suo significato naturale, una nozione che il metalinguaggio corregge nel costruire il linguaggio-oggetto.

Nei discorsi spiccioli "solo se" è usato spesso per "se e solo se", in relazione anche alla errata confusione di implicazione ed equivalenza, a sua volta in parte indotta da queste locuzioni.

Studi di psicologia del ragionamento hanno messo in luce la tendenza delle persone ad applicare l'inferenza scorretta

$$\frac{A \to B,\ B}{A,}$$

interpretando l'implicazione come un'equivalenza. Allora "prendo l'ombrello solo se piove" verrebbe a significare "se piove prendo l'ombrello, se non piove non prendo l'ombrello", e il "se e solo se" sarebbe inutile, un vezzo dei matematici che vogliono parlare in modo sofisticato.

Constatata questa tendenza diffusa, bisogna farsene una ragione. La spiegazione, sia della identificazione di implicazione ed equivalenza, sia del disagio a interpretare "$A$ solo se $B$" come "se $A$ allora $B$", potrebbe essere che "$A$ implica $B$" è affermato come se significasse che $A$ è la causa di $B$. Allora "prendo l'ombrello solo se piove" non è percepito come "se prendo l'ombrello piove", perché questa seconda formulazione sembrerebbe dire che il prendere l'ombrello causa la pioggia.

L'idea di "causa" è tuttavia difficilmente definibile, è una spina nel fianco della filosofia, da Aristotele con i suoi quattro tipi di causa a Hume che la nega ai giorni nostri. Comunque è una intrusione non autorizzata nel metalinguaggio matematico.

L'uso corretto di "solo se" nei discorsi comuni, trasportato nel linguaggio matematico, si spiega con il seguente esempio:

A dice: "prendo l'ombrello solo se piove"

B vede A con l'ombrello e osserva: "se A ha l'ombrello allora piove".

B non pensa certo che A sia il re della pioggia, che il fatto che ha preso l'ombrello abbia fatto piovere, ripete solo quello che aveva detto A[25].

Un problema ancor più delicato e più sottile, che ha fatto scrivere fiumi di inchiostro ai fondatori della logica matematica (Russell, 1908, par. 11; Russell, 1903, cap. 8), è quello delle variabili, libere o vincolate, che corrispondono ai pronomi dimostrativi indeterminati.

La variabile libera corrisponde a "uno" ("un", "una") della lingua, o ad altre parole o descrizioni interscambiabili, "un tizio", "chi" e simili. Si vede subito che con i pronomi ci sono espressioni

25. Per una discussione più approfondita, si veda (Lolli, 2014. cap. 22 "Se se allora allora").

ambigue, disambiguate solo dal contesto e da elementi non sintattici, pragmatici o forniti da altre conoscenze.

1. "chi sbaglia, paga", "se uno sbaglia, paga", "tutti quelli che sbagliano pagano" sono facilmente riconosciuti come equivalenti.
2. "un numero pari maggiore di 2 non è primo" vuol dire "tutti i numeri pari…", "un qualsiasi numero pari…".
3. "un numero moltiplicato per se stesso dà 1" contiene la descrizione di un ben preciso e unico numero, il numero 1.
4. "uno trova difficile imparare la matematica" purtroppo non vuol dire che ce ne è uno, sarebbe troppo bello, vuol dire "tutte le persone trovano difficile imparare la matematica"[26], o "le persone (in maggioranza almeno) trovano difficile imparare la matematica".
5. "se uno qualsiasi dice che le staminali curano il cancro, tutti ci credono".

Quest'ultima frase è interessante perché è un caso dove "qualsiasi" non vuole dire "tutti". Se la si riformula come "basta che uno dica…" si capisce che si pensa a una persona, magari a più di una, e "qualsiasi" non ha un senso quantitativo ma vuol dire che non importano le sue credenziali o che non ha credenziali. Si potrebbe dire in modo equivalente "se qualcuno dice che le staminali…".

Se però la si riformula come "la gente crede a tutti quelli che dicono che le staminali curano il cancro" si vede che si può usare anche la parola "tutti", e sembra che questi pronomi siano tutti interscambiabili. La lingua dei pronomi, come il Dio di Einstein, è quanto mai intricata, ma non ingannevole; sono sì interscambiabili, ma non equivalenti; il loro senso preciso dipende in modo estremamente sensibile dalla posizione all'interno della frase (e dal resto della nostra frase si capisce: la gente non crede a tutti, ma a *tutti quelli che* dicono…).

In logica i riferimenti indeterminati si realizzano con le variabili $x$, $y$, … e due operatori detti rispettivamente quantificatore universale, $\forall x$, e quantificatore esistenziale, $\exists x$, che si leggono in modo standardizzato "per tutti gli $x$" ed "esiste un $x$". Si intende, ma va spiegato, che quest'ultima locuzione significa "esiste almeno un $x$". Sono ammissibili diverse letture (l'importante è la scrittura formale), come "ogni $x$ tale che…", "qualunque $x$…", risp. "c'è un $x$", "qualche $x$" e così via coprendo tutte le locuzioni della lingua. La formalizzazione richiede talvolta l'introduzione di un "se…allora" che non compare nelle frasi in lingua, come in 1 e 2.

Le regole riguardanti i quantificatori sono semplici ma molto duttili, e si riesce a esprimere qualsiasi affermazione. Le frasi di sopra possono essere formalizzate; bisogna innanzi tutto interpretarle correttamente, e per questo conviene prima riformularle sempre in italiano ma usando le locuzioni "per tutti" ed "esiste un"; questo costringe a vedere e a inserire i "se…allora" nascosti; quindi si utilizzano, se si vuole, alcune abbreviazioni nelle parti non logiche: un predicato o relazione si rappresenta con la lettera iniziale della parola; si tralasciano per semplicità i domini di variabilità delle variabili, persone, cose, numeri; alla fine si ottiene

1. $\forall x(S(x) \to P(x))$
2. $\forall x(\text{pari}(x) \land x > 2 \to \neg\text{primo}(x))$
3. $x \cdot x = 1$ è una descrizione,
   $\exists x(x \cdot x = 1)$ un'affermazione vera,
   $\forall x(x \cdot x = 1)$ falsa.

26. Si direbbe più realisticamente "quasi tutte", ma il "quasi' non è un concetto matematico, o non ancora soddisfacemente matematizzato, e quindi non appartiene al linguaggio. Si è cercato di introdurre un concetto algebrico, quello di filtro, per analogia con la distinzione intuitiva tra "grande" e "piccolo", ma nel caso di un dominio infinito non risulta coerente (il complemento di un grande può risultare grande invece di piccolo). Un altro tentativo in statistica è l'uso di distribuzioni, ma i valori per cui si può trascurare una coda piccola sono convenzionali e arbitrari, o dipendenti dal problema.

Tuttavia nessuna delle due esprime il senso della frase 3, che se pronunciata vuole affermare che esiste un solo numero siffatto. In logica non si possono fare attribuzioni di cardinalità, neanche di 1, ché non sarebbe pura logica[27].

4. $\forall x D(x, m)$

5. Indicando con $S(x)$ "$x$ dice che le staminali curano il cancro" e con $CS(x)$ "$x$ crede che le staminali curino il cancro", la frase diventa

$$\exists x S(x) \to \forall y CS(y)$$

mentre la seconda versione diventa

$$\forall x \forall y (S(x) \to CS(y)).$$

Le regole deduttive per i quantificatori permettono di dimostrare che le due versioni sono equivalenti[28].

Purtroppo i quantificatori vengono spesso tralasciati nella scrittura abbreviata mista, con ovvi pericoli di confusione. Immaginate un povero ritardato che nel suo lessico abbia solo il pronome "uno". In generale una convenzione tacita è che le formule che contengono variabili e non i relativi quantificatori vadano interpretate come se davanti ci fosse un quantificatore universale. Ma si vede che già nel caso delle più semplici equazioni l'omissione e la convenzione tacita portano a errori o equivoci. $\forall x(x + 1 = 1 + x)$ è un'affermazione vera per i numeri naturali; la formula $x+1 = 1+x$ viene detta una "identità". $\exists x(x \cdot x = 1)$ è un'affermazione vera; la formula $x \cdot x = 1$ viene detta una "equazione", e si suppone che il termine suggerisca che se ne debbano cercare le soluzioni[29], ma sintatticamente non c'è alcun modo di distinguere un'identità da una equazione. Anche $x + 1 = 1 + x$ è un'equazione; la differenza sta nell'insieme delle soluzioni. Capita di sentire discussioni tra insegnanti relative alla questione se una identità sia un'equazione o no; figuriamoci gli allievi.

La logica ha portato nel linguaggio matematico una parte importante della lingua, quella che riguarda le inferenze con affermazioni di generalità; la lingua non è solo lessico. Se non si vuole insegnare questa parte della lingua per preclusioni ideologiche nei confronti della logica, bisognerebbe che almeno i docenti la padroneggiassero in modo sicuro, per interagire correttamente con gli allievi.

Purtroppo la pratica invalsa dell'insegnamento lascia molto a desiderare. Un caso emblematico è quello del concetto di probabilità, e altri connessi. Nell'introduzione della probabilità si direb-

27. Per chi è interessato, si usa un giro di frase che utilizza l'uguaglianza, in questo caso

$$\exists x(x \cdot x = 1 \wedge \forall y(y \cdot y = 1 \to y = x)),$$

che si legge "esiste un numero tale che… e tutti quelli che soddisfacessero la stessa…coinciderebbero con esso numero".

28 Se invece la frase fosse "se uno dice che le staminali… tutti *gli* credono", non si potrebbe usare il quantificatore esistenziale, ma solo formalizzare con

$$\forall x \forall y (S(x) \to C(y, x)),$$

usando $C(u, v)$ per "$u$ crede a $v$".

29. Pare che una volta si usasse, non il quantificatore esistenziale, ma la parola "equazione" per dare esercizi di risoluzione: "risolvi l'equazione…", ed è rimasto nel susseguirsi delle generazioni. Chi scrive i libri di testo non ha studiato elementi di logica, gli insegnanti seguono i libri, e il ciclo continua.

be che il metalinguaggio si accodi al linguaggio matematico[30], l'insegnante ha fretta di arrivare ai primi esempi ed esercizi e le spiegazioni si limitano a fingere di aver definito i termini che si usano, mentre cercano solo di anticipare a parole le formule che arriveranno, e saranno un porto sicuro. Gli allievi non hanno un'esperienza probabilistica su cui appoggiare l'introduzione dei concetti[31].

Nei libri di testo si trova la definizione di probabilità come un numero, tra 0 e 1, assegnato a un evento. Come la parola non è molto usuale, si dà la definizione

Un *evento* è un avvenimento che può accadere oppure no[32].

Definire parole che non hanno bisogno di essere definite, quando non sia per definire un termine matematico, serve solo a confondere le idee[33]. Forse "evento", come usato per manifestazioni pubbliche, è anzi più familiare di "avvenimento", ma nessuna delle due parole esprime una situazione probabilistica.

Come secondo passo, la definizione di probabilità è preceduta da una tappa di avvicinamento: "la probabilità dell'evento dipende dal confronto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili". Un avvenimento che abbia casi favorevoli non ha molto senso in italiano. Una parola più adatta per descrivere la cornice di un problema di probabilità sarebbe forse "esperimento", oppure "prova", visto che quando si passa alla probabilità statistica si parla in generale di ripetizione di prove, *termina multiplicantur.* Al massimo si potrebbe pensare a un avvenimento prodotto da un'azione o decisione, fisica o sociale, da cui ci si aspettano diverse soluzioni, imprevedibili, alcune delle quali sarebbero considerate soddisfacenti, più che favorevoli. Il Comune potrebbe organizzare per la festa del patrono un evento, ma non si sa ancora se sarà un concerto, e di quali gruppi, o i fuochi artificiali, o altro. I casi possibili nella vita reale hanno una gamma indefinita.

In seguito "evento" è definito come un insieme, e vedere un avvenimento come un insieme non è naturale. D'altra parte non si capisce perché non presentare dall'inizio una situazione strutturata con un dominio e una serie di proprietà o sottoinsiemi del dominio, come è in tutti i primi esercizi.

Segue poi la definizione vera e propria, che precisa l'idea generica (e inutile) di confronto con quella di rapporto:

> La probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero dei casi possibili (che devono essere tutti ugualmente possibili).

"Ugualmente possibili" è una precisazione ovviamente circolare. Su questa base traballante gli allievi dovrebbero essere in grado di comprendere concetti ancora più difficili, come quello di eventi indipendenti:

> Due eventi sono indipendenti quando il verificarsi di uno non cambia la probabilità del verificarsi l'altro[34].

o di eventi incompatibili:

30. Come una ricapitolazione della storia: i calcoli relativi ai giochi di carte si facevano nel Seicento, prima che la probabilità diventasse un concetto matematico.

31. Forse hanno l'esperienza di aspettare un autobus alla fermata, esperienza psicologicamente ingannevole, non di valutare quanto tempo aspettano in media, in funzione della frequenza dei passaggi.

32. Non indichiamo il testo scolastico da cui sono prese queste citazioni.

33. Quando si decide di introdurre la somma come unione di insiemi disgiunti, non si definisce "insieme", al massimo si propongono diversi sinonimi.

34. Se si usa la locuzione "il verificarsi l'altro" per dire "che l'altro si verifichi" non si vede perché prima non dire "il verificarsi l'uno" invece di "il verificarsi di uno".

In tutti quei casi in cui due eventi non hanno la possibilità di verificarsi contemporaneamente, si dice che gli eventi sono incompatibili.

L'uso delle parole "possibile", "possibilità", che nella mente di chi ascolta hanno una relazione, non chiarita, con la probabilità è un difetto generale delle introduzioni correnti al pensiero probabilistico. La loro impostazione rivela la pigrizia intellettuale di non cercare una spiegazione comprensibile non circolare per introdurre il concetto.

## 6. Quale lingua?

Viene da chiedersi se ci sono differenze tra una lingua e un'altra per quel che riguarda la loro funzionalità come metalinguaggi per la matematica. Anna Sfard sostiene che non c'è differenza tra inglese ed ebraico (Sfard, 2008, trad. it. p. 162), ma si contraddice, quando ricorda una parola ebraica che può essere tradotta sia al singolare *is* sia al plurale *are* (p. 74, nota); questo incrocia un passaggio cruciale nello sviluppo dei concetti matematici, dal numero come aggettivo al numero come nome. In inglese, alla domanda *How many apples are there on the table* la risposta *There are four* tratta ancora il numero come aggettivo, mentre *There is four* è segno che si sta concettualizzando il numero. Quasi lo stesso in italiano, dove la risposta può essere sia "ce ne sono quattro", sia "ce ne è quattro" (ma non "c'è quattro").

In inglese c'è la differenza tra l'articolo indeterminativo "*a, an*" e il nome del numero 1, "*one*"[35], che può influire positivamente sull'apprendimento del numero, ma ancor più sulla comprensione dei quantificatori: $\exists x$…si legge correttamente "*there exists an x…*" non "*there exists one x*". In italiano bisogna sottolineare esplicitamente l'interpretazione corretta, dove l'"un" di "un $x$" non è 1, ma "almeno uno".

Nella terminologia più avanzata si possono trovare differenze tra le varie lingue. Pare che in cinese i numeri della seconda decina siano indicati, come i successivi, con la parola per la decina davanti (dieciuno, diecidue,…) e questo secondo alcuni agevola la comprensione della rappresentazione posizionale dei numeri.

In inglese la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, viene espressa da "*multiply out*", come se la si pensasse da sinistra verso destra, come la nostra parola "distribuire", ma non esiste l'analogo per il "raccogliere a fattor comune" (da destra a sinistra).

Differenze come queste possono influire sul primo apprendimento di concetti matematici, ma non sembrano decisive. Molto più importante è il fatto che i discorsi, le storie, le esperienze che costituiscono la cultura di un paese e sono sedimentate nella lingua sono un ricco e decisivo campo di fioritura delle analogie che portano al pensiero matematico[36], e che quindi è preferibile che l'apprendimento si svolga nella lingua madre[37].

In seguito ovviamente, ogni arricchimento culturale è auspicabile, incluso quello di sviluppare in una lingua straniera l'apprendimento di una disciplina scientifica, in particolare della matemati-

---

35. Hofstadter rileva che solo in americano "one" è usato anche come articolo (Hofstadter & Sander, 2013, p. 75).

36. Forse l'insegnante che ha spiegato il pari e dispari ha scelto come base la classe perché gli allievi erano abituati a uscire dalla scuola in quel modo ordinato, e non le sarebbe venuto in mente in un paese dove di solito escono urlando e correndo a frotte.

37. Non c'è bisogno di fare appello alla tesi di Sapir-Whorf, secondo la quale "Anatomizziamo la natura seguendo le linee tracciate dalle nostre lingue", ma può essere utile ricordarla: "In gran parte, noi vediamo e udiamo […] come facciamo perché le abitudini linguistiche della nostra comunità predispongono certe scelte di interpretazione" (Sapir, 1949); "Le categorie e i tipi che isoliamo dal mondo non li troviamo perché si impongono con evidenza allo sguardo di ogni osservatore; il mondo si presenta come un flusso caleidoscopico che deve essere organizzato dalle nostre menti, il che vuol dire in larga misura dal sistema linguistico delle nostre menti" (Whorf, 1940).

ca. Purché si abbia un grado di maturazione e competenza sufficiente in entrambe, in modo che le difficoltà dell'una non si riversino sull'altra[38].

Per quel che riguarda la matematica avanzata, prevale la lingua delle comunità matematiche egemoni e più creative, quindi ora l'inglese, favorita anche dalla globalizzazione economica e sociale che si appoggia a questa lingua, o ai suoi dialetti. Nell'Ottocento la ricerca matematica era esposta e comunicata in tutte le lingue europee principali.

All'inizio del Novecento i matematici erano poliglotti. La situazione in seguito si è deteriorata per motivi politici. I matematici russi, prima bilingui in francese e russo, restarono isolati dal resto del mondo dopo la rivoluzione; la matematica russa divenne un mistero.

Gli italiani non hanno saputo approfittare delle condizioni favorevoli allo scambio scientifico: Peano si è messo a lavorare per una lingua internazionale, nel solco degli esperimenti con l'esperanto, il Volapük, e a scrivere in latino *sine flexione* (Lolli, 2001); i geometri algebrici hanno coperto di un velo di oscurità le loro ricerche, utilizzando una lingua retorica, barocca, gonfia e tronfia. Anche quando scrivevano di argomenti più generali, esprimevano un pensiero contorto ed enfatico che impediva la sua diffusione, come è successo per esempio a Enriques in filosofia della scienza, nonostante una traduzione americana. Un recensore (Broad, 1914), benché presenti il libro come ricco di argomenti interessanti, esprime delusione e recriminazioni: "[il libro] tratta così numerosi e difficili argomenti che l'esposizione è oscura per eccesso di condensazione […] Non sono perfettamente sicuro di capire questo […] Di nuovo non vedo precisamente che cosa dovrebbe provare l'argomento speciale del prof. Enriques sull'infinito attuale", e così via deprecando (Lolli, 2012).

Con la loro lingua, più consona a proporre la filosofia idealistica che non la matematica, i geometri arrivavano a limiti invalicabili di approfondimento e di chiarezza. Le parole che dovevano rappresentare immagini trascendenti si avvoltolavano su se stesse e non riuscivano a comunicare la visione intuita[39].

La geometria algebrica è uscita dai confini esoterici italiani quando è stato concepito un formalismo algebrico adeguato; la lingua si è trasformata nel metalinguaggio del formalismo affidando ad esso il contenuto matematico, e liberandosi dal compito improbo di rappresentare a parole quello che non ha alcun riscontro diretto nella realtà.

Ogni lingua evolve, a seconda delle condizioni sociali e culturali, adattandosi al pensiero che vuole esprimere. L'italiano come metalinguaggio matematico ha la stessa chiarezza e funzionalità delle altre lingue nel loro analogo ruolo, a differenza di quando vuole parlare dello spirito.

## Riferimenti bibliografici

Broad, C. D. (1914). Problems of Science. *Mind, 24*, 94-98. [Recensione di Enriques (1914)].

Clement, J. & Lochead, J., & Monk, G. (1981). Translation difficulties in Learning Mathematics. *American Mathem. Montly*, 286-290.

Davis, R. B., & Maher, C. A. (1997). How Students Think: The Role of Representations. In L. D.

38. Interpretiamo in questo senso benevolo l'indicazione ministeriale che "Dal primo anno del secondo biennio è previsto l'insegnamento in lingua straniera di una disciplina non linguistica compresa nell'area delle attività e degli insegnamenti obbligatori per tutti gli studenti. Dal secondo anno del secondo biennio è previsto anche l'insegnamento in una diversa lingua straniera di una disciplina non linguistica"(MIUR, 2010) per i licei classici (p. 32) ma anche artistici, linguistici, musicali, scientifici, delle scienze umane. In vista dell'entrata in vigore della disposizione, dal 1 settembre 2010, sono previsti e affidati all'Indire corsi di lingue per docenti di discipline non linguistiche secondo la metodologia CLIL (*Content and Language Integrated Learning*).

39. Si racconta l'episodio del celebre professore che a uno studente che non capisce una dimostrazione risponde che lui la vede chiara come vede il vaso sulla finestra dell'aula.

English (ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors, and Images*, London: Lawrence Elbaum Associates, p. 93-115.

English, L. D. (1987). Analogies, Metaphors, and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning. In L. D. English (ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors, and Images*, London: Lawrence Elbaum Associates, p. 3-18.

Enriques, F. (1914). *Problems of Science*. Chicago: The Open Court Pub [trad. it. *I problemi della scienza*, Bologna: Zanichelli, 1906].

Galilei, G. (1623). *Saggiatore*. In G. Galilei, *Opere* (a cura di F. Brunetti), Torino: UTET, 1980, p. 631-2.

Giusti, E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.

Hofstadter D., & Sander, E. (2013). *Surfaces and Essences. Analogy as the Fuel and Fire of Thinking*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics comes from*. New York: Basic Books [trad. it. *Da dove viene la matematica*, Torino: Bollati Boringhieri, 2005].

Lolli, G. (2014). *Se viceversa.* Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2012). Federigo Enriques as philosopher of science. In S. Coen (ed.), *Mathematicians in Bologna*, New York: Springer, p. 333-342.

Lolli, G. (2003). *Da dove viene la matematica* [recensione]. Consultato il 15 ottobre 2015 all'indirizzo http://homepage.sns.it/lolli/articoli.htm

Lolli, G. (2001). Peano matematico e grammatico. In C. S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano*, Savigliano: L'Artistica, p. 27-35.

MIUR (2010). *Guida alla nuova secondaria*. Consultato il 15 ottobre 2015 all'indirizzo http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/getOM?idfileentry=217468

Navarra, G. (1990). E se una triándria di poliferi ammirasse una scultura perilitica? *Scuola e didattica, anno XXXV* numero 10, 79-82.

OECD (n.d.). *Program for International Student Assessment*. Consultato il 15 ottobre 2015 all'indirizzo http://www.oecd.org/pisa/

Pagli, P. (2014). *Le onde di pietra*. Pubblicazione privata.

Russell, B. (1903). *I principi della matematica*. Milano: Longanesi [trad. it 1963].

Russell, B. (1908). Mathematical Logic as based on the Theory of Types. In R. C. Marsh (ed.) (1956), *Logic and Knowledge*, London: Allen & Unwin, London,

Sapir, E. (1949). *Selected writings in language, culture, and personality*. Berkeley: University of California Press.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge Univ. Press [trad. it. *Psicologia del pensiero matematico*, Trento: Erickson, 2009].

Silvestri, G. (1894). *Nuovo Abbaco Intuitivo - con Esercizi Graduati di Calcolo Mentale ad uso della Classe 1a Elementare*. Direzione dell'Unione dei Maestri, Paravia: Torino.

Stewart, I. (2014). *I grandi problemi della matematica*. Torino: Einaudi [edizione originale 2013].

Turing, A. M. (1947). Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947. In A. M. Turing, *Intelligenza meccanica* (a cura di G. Lolli), Torino: Bollati Boringhieri, 1994, p. 63-88 [trad. it].

Whorf, B. L. (1940). Science and Linguistics. *Technology Review, 42*(6), 229-231, 247-328.